2 ネットワーク

グラフの各点／枝に,（グラフが表わす）対象に応じた数値を付随させたものをネットワークと呼ぶ.
ネットワークを用いて表現される最適化問題は広範で多岐に及ぶ.
これらの最適化問題を総称して「ネットワーク計画」と呼ぶ.

2.1 最小全域木（Minimum Spanning Tree）

枝長を d_{ij} とするネットワーク $\mathcal{N} = (V, E, \boldsymbol{d})$ において,
枝長の総和 $\sum_{(ij)\in F} d_{ij}$ が最小となる全域木（Spanning Tree）$T = (V, F)$ を求める問題.
例えば, 原油の掘削井戸を, 延べ長さ最小のパイプラインで結ぶ.

2.1.1 定式化

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(|V| = n)$ $\qquad E = \{\overline{12}, \overline{13}, \ldots, \overline{n-1 \cdot n}\}$ $(|E| = \frac{n(n-1)}{2})$
- x_{ij} $(i < j)$：無向枝 ij を全域木の構成に使用する（1）か否（0）かを表す0-1決定変数.

$$
(\mathrm{MST})\left\{\begin{array}{lll}
\text{minimize} & w = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} d_{ij}x_{ij} \\
\text{sub. to} & & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} x_{ij} = n-1 \\
 & & \displaystyle\sum_{\substack{i\in S\\ i<j}}\sum_{j\in\bar{S}} x_{ij} + \sum_{\substack{j\in S\\ i<j}}\sum_{i\in\bar{S}} x_{ij} \geq 1 \,, \qquad \forall S \subset V \ (S \neq \phi, V)
\end{array}\right.
$$

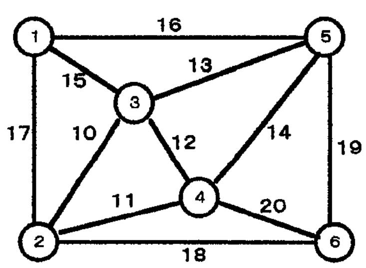
2.1.2 解法

Kruskal のアルゴリズム

d_{ij} の小さい順に, 全域木を構成する枝として取り入れていく. ただし, 取入れによって閉路ができてしまう場合, その枝は除外する. 枝数が $m-1$ 本（m は点の個数）となれば終了.

Prim のアルゴリズム

最小部分全域木 $ST = (U, X)$ を成長させて T を求める. 最初は $ST \equiv (U, X) = (\{①\}, \phi)$ から出発.
$d_{i^*j^*} = \min_{i\in U, j\in V-U} d_{ij}$ を求めて, $ST \equiv (U, X) := (U \cup \{j^*\}\,,\, X \cup \{\overline{i^*j^*}\})$ とする. $U = V$ となれば終了.



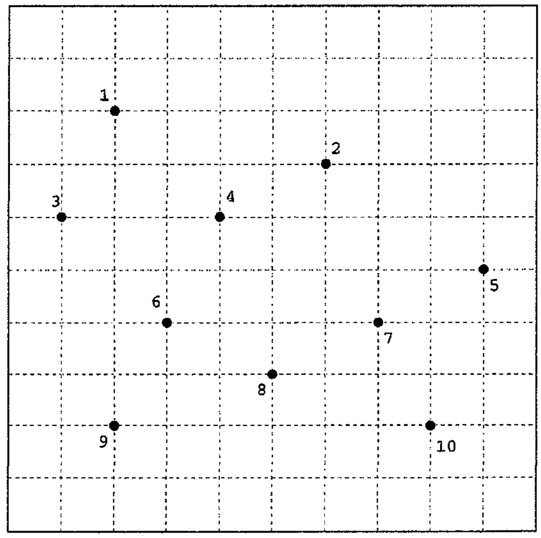
：例題（描かれていない枝の長さは ∞）

2.2 巡回セールスマン問題（Traveling Salesman Problem）

2.2.1 問題

無向または有向ネットワークにおいて，すべての点を1度ずつ訪問する巡回路の中で，巡回路長（通過する枝長の和）が最小のものを求める問題．

2.2.2 データ



例えば，右図のような10個の点を総移動距離最小で一巡したいとする．
この場合，枝は（潜在的に）全2点間に存在するものとする．すなわち，$\binom{10}{2}$ 本の枝が存在する完全グラフから最短の巡回路（ループ，閉路）を取り出す．
枝の長さは点間のユークリッド距離で与える．全点間の距離を，距離行列 $D = (d_{ij})$ で表現する．
ここでは，$d_{ij} = d_{ji}$ が成立する対称巡回セールスマン問題とする．

点座標：

1	20	80
2	60	70
3	10	60
4	40	60
5	90	50
6	30	40
7	70	40
8	50	30
9	20	20
10	80	20

,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 41 & 22 & 28 & 76 & 41 & 64 & 58 & 60 & 85 \\ 41 & 0 & 51 & 22 & 36 & 42 & 32 & 41 & 64 & 54 \\ 22 & 51 & 0 & 30 & 81 & 28 & 63 & 50 & 41 & 81 \\ 28 & 22 & 30 & 0 & 51 & 22 & 36 & 32 & 45 & 57 \\ 76 & 36 & 81 & 51 & 0 & 61 & 22 & 45 & 76 & 32 \\ 41 & 42 & 28 & 22 & 61 & 0 & 40 & 22 & 22 & 54 \\ 64 & 32 & 63 & 36 & 22 & 40 & 0 & 22 & 54 & 22 \\ 58 & 41 & 50 & 32 & 45 & 22 & 22 & 0 & 32 & 32 \\ 60 & 64 & 41 & 45 & 76 & 22 & 54 & 32 & 0 & 60 \\ 85 & 54 & 81 & 57 & 32 & 54 & 22 & 32 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.3 定式化

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(|V| = n)$ $\qquad E = \{\vec{ij}\}(i, j(\neq j) = 1, 2, \ldots, n)$ $(|E| = n(n-1))$
- x_{ij} $(i \neq j)$：セールスマンが点 i から点 j へ直接移動する（1）か否（0）かを表す0-1決定変数．
（有向枝 $\vec{ij}$ が巡回路の構成枝であるか否か）

$$(\mathrm{TSP}) \left\{ \begin{array}{lll} \text{minimize} \quad z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j(\neq i)=1}^{n} d_{ij} x_{ij} & \\ \text{sub. to} & \displaystyle\sum_{h(\neq i)=1}^{n} x_{hi} = 1 \, , & \forall i \in V \\ & \displaystyle\sum_{j(\neq i)=1}^{n} x_{ij} = 1 \, , & \forall i \in V \\ & \displaystyle\sum_{i \in S} \sum_{j(\neq i) \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \, , & \forall S \subset V \ (S \neq V, \ |S| \geq 2) \end{array} \right.$$

2.2.4 解法

- 極めて多くの解法が提案されている．
- 近似解法，発見的解法，分枝限定法，分枝カット法

2.2.5 最適値の 2 倍長以内の巡回路を求める近似解法

- 最小全域木（MST）を求める．
- 任意の点（例えば点 1）から始めて，MST に沿って各点を 1 度以上，
  各枝をちょうど 2 回以上訪問／通過する閉路を求める．
- 上記閉路において,（点 1 以外の）2 度目の訪問点はスキップ（未訪問のへバイパス）するように閉路を変更する．

問題の点集合（潜在ネットワーク）に対して

z_A :　上記解法（アルゴリズム）で求めた閉路（近似解）の総枝長
w^{opt} :　最小全域木を構成する枝の総枝長（MSP の最適値）
z^{opt} :　最短巡回路長（TSP の最適値）

このとき，

$$z_A \leq 2w^{\mathrm{opt}} \leq 2z^{\mathrm{opt}}.$$

2.2.6 下界値を求める方法

- 点 $\{i\}$ を除いてできる部分（潜在）ネットワークの最小全域木を求める．
- 点 i から 1，2 番目に短い枝を選び，その 2 枝と点 i を，上で求めた最小全域木に加えたものを最小 1 木と呼び，1-MST(i) と表記する．
- （最小 1 木）1-MST(i) に使われている枝の総長を $y(i)$ とすると，
  $$y(i) \leq z^{\mathrm{opt}} \qquad \forall i \in V$$
  が成立する．
- $\max_{i \in V} y(i)$ は z^{opt} の下界値である．

$w^{\mathrm{opt}} = ?$
$z_A = ?$
$y(4) = ?$
$z^{\mathrm{opt}} = 266$ （by tour " 1 → 4 → 2 → 5 → 10 → 7 → 8 → 9 → 6 → 3 → (1) " ）