

4 PERT/CPM (日程計画)

大規模な土木建設工事、開発事業等において、それらを構成する要素作業（“先行-後続”関係を有するものが多数ある）の実行タイミングを決定し、ネックとなる作業を特定し、計画期間の効率的な短縮を提案する方法。要素作業の管理技術。

当然、計算機の利用を前提としている。

4.1 起源

- ガント・チャート (Gantt-chart) を用いた日程計画
- 工程流れ図 (block diagram) を用いた日程計画
ブロックダイアグラム：
作業を点 (箱, 丸印) で表し、その間の (直接の) 前後関係を有向枝で表したグラフ
- 矢線図 (arrow diagram) を用いる日程計画：
PERT (Program Evaluation and Review Technique)
CPM (Critical Path Method)

4.2 作業順序制約を表す有向グラフ

4.2.1 アローダイアグラムとトポロジカルオーダ

アローダイアグラム : 作業を矢線 (有向枝) で表し、その間の (直接の) 前後関係を始点と終点の “重ね合わせ” で表したグラフ。

作業開始条件 (制約) を点 (結節点と呼ぶ) で表したところがミソ。

トポロジカルオーダ : 各結節点に対し、どの有向枝 (作業) も「始点番号 < 終点番号」の条件を満たすように番号を付ける (トポロジカルオーダリング)。

n 個の結節点に対し、 $1, 2, \dots, n$ の連続した番号を付ける。

作業は、この番号の対で表される。

- 構造表現 (グラフ表現) としては、ブロックダイアグラムの方が自然であるが、日程計画の作業上は、アローダイアグラムの方が便利である。
- アローダイアグラムで表現する場合は、**ダミー作業** 等の導入が必要になる。

4.2.2 アローダイアグラムの構成規則

◇ 各作業は1つの矢線 (アロー) で示され、矢線の始終点は点番号を持つ。

◇ 作業 \Leftrightarrow 点番号対 $((i, j))$ トポロジカル・オーダ :

◇ トポロジカル・オーダ : (i, j) が作業を表す $\Rightarrow i < j$

◇ 1つの点に入ってくるすべての作業が完了しないとその点から出て行く作業は開始できない。

◇ 1つの点から出て行く作業は (前項の条件が満たされた後) いくつでも同時に開始してよい (いつ開始してもよい)。

- ♡ 先行仕事を持たない作業がいくつかあるときは、それらの始点を1つにまとめて全作業の開始点とする。
- ♡ 後続仕事を持たない作業がいくつかあるときは、それらの終点を1つにまとめて全作業の終了点とする。
- ♠ 合成作業（作業の分解），複合仕事（作業統合）
- ♠ ダミー作業A（ $\langle 1 \rangle: A \rightarrow B, C \rightarrow E, \langle 2 \rangle: A \rightarrow C; A, B \rightarrow E$ ）
- ♠ ダミー作業B（リード・タイムの表現，納期の表現）

4.3 PERT/CPMの手順

- p1. プロジェクトを要素作業に分解する。
- p2. 要素作業およびその間の（半）順序関係を作業リストで表す。
- p3. 要素作業およびその間の（半）順序関係をアローダイヤグラムで表す。
- p4. アロー・ダイヤグラムのノードに（トポロジカル・オーダに従う）番号を付す。
- p5. クリティカル・パスを求める。
- p6. 各ノードの 最早開点時刻，最遅閉点時刻 を求める。
- p7. 仕事に関連した時間を求める。
- p8. 総所要時間の短縮を目指す。

[最早開点時刻と最遅閉点時刻]

トポロジカル・オーダを前提として，各点の

$$\text{最早開点時刻 } t_i^E \text{ と最遅閉点時刻 } t_i^L \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を求める。

- 最早開点時刻：その点を始点とする作業を開始できる最も早い時刻（点1を時刻0に出発するとき可能な，その点からの最早出発時刻）

$$t_1^E = 0, \quad t_i^E = \max_{h \in \text{PRED}(i)} \{t_h^E + d_{hi}\} \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

- 最遅閉点時刻：その点を終点とする作業が終了していなくてはならない最も遅い時刻（ $t_n^E = Z$ としたとき，点 n へ時刻 Z までに到着するために許されるその点への最遅到着時刻）

$$t_n^L = Z, \quad t_i^L = \min_{j \in \text{SUCC}(i)} \{t_j^L - d_{ij}\} \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1)$$

[仕事に関する時刻・時間]

- 開始可能時刻 / （終了可能時刻） $ES_{ij} = t_i^E$ ($EF_{ij} = t_i^E + d_{ij}$)
- 終了限度時刻 / （開始限度時刻） $LF_{ij} = t_j^L$ ($LS_{ij} = t_j^L - d_{ij}$)
- 最大遊び時間 $TF_{ij} = LS_{ij} - ES_{ij} = LF_{ij} - EF_{ij}$
- 迷惑をかけない遊び時間 $FF_{ij} = t_j^E - t_i^E - d_{ij}$

[クリティカル・パス]

仕事全体を最短で終わらせようとするとき（時刻0に始めてZで終わるとしたとき）、開始時刻が一意に決まってしまう（最大遊び時間=0の）作業からなるアロー・ダイアグラム上の①から⑦へ至る道（path）。

4.4 例題

[作業リスト]

作業	先行作業	後続作業	所要時間（分）
A	ナシ	B, C, H	10
B	A	D, G	25
C	A	F	90
D	B	E	45
E	D	I	20
F	C	I	30
G	B	I	10
H	A	I	20
I	E, F, G, H	ナシ	5

4.5 作業日程表の作成

- 各ノードの 最早開点時刻, 最遅閉点時刻 を求める.
- 仕事に関連した時間を求める.

作業 (i, j)	可能時刻		限度時刻		全余裕	自由余裕	緊急要路
	ES	EF	LS	LF	TF	FF	C.P.
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							
H							
I							

4.6 CPMの実行

- cost をかけて, 総所要時間を短縮することを考える.
- cost: ○○円 / 10分 (10分短縮するのに, ○○円かかる)

作業	所要時間 (分)	変更限界 (分)	費用 (千円 / 10分)
A	10	-	
B	25	-	
C	90	45	1
D	45	30	1
E	20	10	1.2
F	30	20	1.5
G	10	5	1
H	20	10	1
I	5	-	

- 全体の schedule 長 を縮めることを考える.
- critical path 上の作業を短縮する.
- どこまで短縮できるか?
 1. 限界まで
 2. 限界以内でも他の path が critical path と等しくなるまで
- critical path 上に短縮可能な作業が無くなれば, 終わり.

♣ 線形計画問題としての定式化