5　有限マルコフ連鎖

確率モデル

システムの未来の状態を確率分布として知りたい，予測したいという要求に応える理論.

例：　職場の移動，　ブランド選好，　学年移動

5.1　有限マルコフ連鎖の基本概念

離散的確率過程

- 対象とする系（システム）の状態を離散的な時点 $n = 0, 1, 2, \cdots$ で考える.
- システムのとりうる状態の数は有限であるとし，$s_1, s_2, s_3, \cdots$ で表わす.（$S = \{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$ を 状態空間という.）
- 時刻 n で状態 s_i にあるとき，時刻 $n+1$ に状態 s_j となる確率（推移確率）p_{ij} は
  n によらない（**定常的**）
  時刻 $0, 1, \cdots, n-1$ での状態によらず，現在の状態と次の状態のみによる（**マルコフ性**）
- 状態を点，遷移の可能性を有向枝として表した有向グラフを**状態遷移図**と呼ぶ.
  $p_{ij} > 0$ のとき，i から j へ向かう枝があるとする.
  点 i から点 i への枝（自己閉路）も認める.
  枝 ij には，正の遷移確率 p_{ij} が対応している.
- 時刻 n の状態分布ベクトル　$\boldsymbol{u}^{(n)}$
- 推移確率行列　$P = (p_{ij})$,　　$\boldsymbol{u}^{(n+1)} = \boldsymbol{u}^{(n)} P$
- 高次推移行列　$P^{(k)} = P^k$,　　$\boldsymbol{u}^{(n+k)} = \boldsymbol{u}^{(n)} P^{(k)} = \boldsymbol{u}^{(n)} P^k$
- $\boldsymbol{v}$　定常（確率）分布　　$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} P$

5.2　例

(1) 都内／外 移住 連鎖
　　都内 $\longrightarrow$ 都内: 0.8　　都外: 0.2
　　都外 $\longrightarrow$ 都内: 0.1　　都外: 0.9
　　どちらの初期状態から出発しても，同一の定常分布に落ち着く（$P^{(\infty)}$の行はすべて同一）.
　　この定常分布を求める.

(2) 酔歩（random walk）
　　駅 $\longleftrightarrow$ 1丁目 $\longleftrightarrow$ 2丁目 $\longleftrightarrow$ 3丁目 $\longleftrightarrow$ 自宅
　　自宅へ向かう確率: 2/3　　反対方向へ戻る確率: 1/3
　　一般にはどこから出発したかが，定常分布にきいてくる.
　　反射壁，吸収壁.　　吸収されるまでの時間（推移回数）を求める.

5.3　マルコフ連鎖の分別

■ 対象としているモデルが，上記2例のどちらのタイプのマルコフ連鎖かを見分ける必要がある.
■ タイプによって，振舞いが異なり，扱い方が違ってくる.
■ 連鎖のタイプは，連鎖を構成する状態の性質を見ると分かる.

5.3.1 各状態の性質

⋆ **回帰確率：** ある状態（例えば s_j）から推移を始めたとき，いつかは，その状態（s_j）に戻って来る確率を考え，それを f_{jj} と表記する．

・「$f_{jj} < 1$」である（戻らないことがある）状態を**過渡状態**とよぶ． （このとき $P_{jj}^{(\infty)} = 0$）

・「$f_{jj} = 1$」である（必ず戻ってくる）状態を**再帰状態**とよぶ． （このとき $P_{jj}^{(\infty)} > 0$）

⋆ f_{jj} の計算法：

・まず，$f_{jj}^{(k)}$ ： s_j から出発して k 回推移後に初めて s_j に戻る確率を考える．

・$f_{jj}^{(k)} = p_{jj}^{(k)} - f_{jj}^{(1)} p_{jj}^{(k-1)} - f_{jj}^{(2)} p_{jj}^{(k-2)} - \cdots - f_{jj}^{(k-1)} p_{jj}$

・$f_{jj} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)}$

♠ 「$f_{jj} = 1$」とは，**状態遷移図において，**s_j **から出た全ての道が，再び** s_j **へ戻っている**こと，あるいは，s_j **を含む強連結成分から，その外へ向かう枝が存在しない**ことを意味する．

♠ 「$f_{jj} < 1$」とは，**状態遷移図において，**s_j **から出た道の中に，**s_j **へ戻らないものがある**こと，あるいは，s_j **を含む強連結成分から，その外へ向かう枝が存在する**ことを意味する．

- **再帰状態**は，つぎの 3 種に分類される．

  （1）**吸収状態：** $p_{jj} = 1$ であるような状態．

  （2）**非吸収再起状態（エルゴード的）：** $p_{jj}^{(n)} \neq 0$ となる n の最大公約数が 1 である状態．

  （3）**非吸収再起状態（周期的）：** $p_{jj}^{(n)} \neq 0$ となる n の最大公約数が 2 以上である状態．

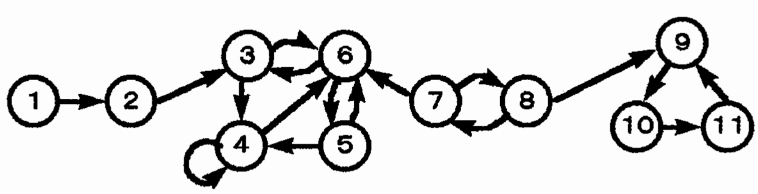
- 以下では，非吸収再帰状態（周期的）は考えない．

5.3.2 マルコフ連鎖全体の分類

♡ 状態遷移図（連結とする）をブロック（強連結成分）に分ける．

- **過渡的ブロック：** そのブロックから外向きの有効枝が 1 つはあるもの．
  過渡的ブロックに属する状態は，すべて，**過渡状態**．

- **吸収的ブロック：** そのブロックから外向きの有効枝が 1 つもないもの．
  吸収的ブロックに属する状態は，すべて，**再帰状態**．
  ブロック内に 1 個の状態しか存在しない場合は**吸収状態**，
  ブロック内に 2 個以上の状態が存在する場合は**非吸収再帰状態**．



5.3.3　2種類のマルコフ連鎖

状態遷移図をブロックに分けたとき，

A．全状態グラフが1つのブロックになる場合：

すべての状態は再帰状態（吸収／非吸収再帰状態）．

このマルコフ連鎖を **既約有限マルコフ連鎖** とよぶ．　$\Longrightarrow$　5.4節

B．2つ以上のブロックが残る場合：

1つ以上の過渡的ブロックと1つ以上の吸収的ブロックが存在する．

過渡的ブロック内の過渡状態はそのまま（元の状態）とし，

吸収的ブロックを新たな1つの状態（吸収状態）とした，“作業用” マルコフ連鎖を考える．

この作業用の **過渡状態と吸収状態から成るマルコフ連鎖** を解析する．　$\Longrightarrow$　5.5節

5.4　既約有限マルコフ連鎖

状態数有限 で 既約 ゆえ 状態はすべて再帰的　（状態数無限なら全状態過渡的ということもありうる）
状態数 1 の 場合は ナンセンス（吸収状態）．
状態数 2 以上の場合は，すべて非吸収再帰状態（エルゴード的／周期的）．

- 周期的状態は考えない．
  非吸収再帰状態（エルゴード的）のみからなる既約有限マルコフ連鎖を「**既約エルゴード的有限マルコフ連鎖**」とよぶ．
- エルゴード的 か 周期的 かは 推移図でも分かる．
  ある状態を始点とする閉路の長さ（枝数）の最大公約数が2以上．

既約エルゴード的有限マルコフ連鎖の推移行列 P は次の性質を持つ．

- 一般に P は固有値1をもつ．
- 一般に P の固有値 の 絶対値は 1 以下．
- 既約エルゴード的有限マルコフ連鎖の場合 固有値 1 の 多重度は 1.

さらに，

$$\lim_{n\to\infty} P^n = Q = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_N \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_N \end{pmatrix}, \qquad (v_i > 0 : i = 1, 2, \ldots, N)$$

が成立する．　すなわち 任意の初期分布 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ から出発し，充分多くの推移を繰り返すと $\boldsymbol{u}^{(n)}$ は $(v_1, v_2, \ldots, v_N) = \boldsymbol{v}$ に近づく（定常分布）．
定常分布 $\boldsymbol{v}$ は，P の（固有値1に対する）左固有ベクトルとして求められる．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}P \qquad \text{i.e.} \qquad (v_1, v_2, \ldots, v_N) = (v_1, v_2, \ldots, v_N) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$$

■ A．既約エルゴード的有限マルコフ連鎖

高次推移行列の極限（極限行列）は同じ行から成る行列に収束する．

この（同一）行は（一意的な）定常確率分布である．

どの状態（どのような初期分布）から出発しても一定の分布に近づく．

定常確率分布は推移行列の固有値1に対する左固有ベクトル（要素の和＝1）である．

♠ 都内／外 移住 マルコフ連鎖の計算： 5.2 節の例題．

5.5 過渡状態と吸収状態から成る有限マルコフ連鎖

複数の吸収状態を含む場合，各過渡状態から出発して，それぞれの吸収状態に吸収される確率（割合）に興味がある．

各過渡状態から出発して，それぞれの吸収状態に吸収されるまでの期待推移回数に興味がある．

吸収状態 = 吸収的ブロック（一般に複数の再帰状態からなる）内での定常分布を求めるには，

5.4 節（A）の議論を適用する．

5.5.1 過渡状態と吸収状態から成る有限マルコフ連鎖に対する一般理論

推移行列 $P = \begin{pmatrix} T & Q \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$$P^n = \begin{pmatrix} T^n & Q_n \\ 0 & I \end{pmatrix}, \qquad P^\infty = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad A = (I-T)^{-1}Q$$

$\bar{n}_i$： 過渡的状態 s_i から出発していづれかの吸収状態に吸収される迄の期待推移回数

$$\bar{\boldsymbol{n}} = (I-T)^{-1}\mathbf{1}_{N-M}, \qquad \bar{n}_i = \sum_j^{N-M} (I-T)^{-1}_{ij}$$

■ B．過渡的状態と吸収状態のみからなる有限マルコフ連鎖

各過渡的状態から出発して，各吸収状態に落ち着く確率が計算できる．

ある過渡的状態から出発して，いづれかの吸収状態に吸収されるまでの期待推移回数が求まる．

練習問題

(1) 次の推移行列に対応するマルコフ連鎖の推移図をかけ．各連鎖は既約か否か，また既約であればエルゴード的か周期的かを判定せよ．エルゴード的であれば極限行列を求めよ．

$$(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.45 & 0.1 & 0.45 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

(2) A，B 2人が継続的に囲碁の対局を行っている．実力は伯仲しているので，3番勝ち越しまで続けるという約束である．これをマルコフ連鎖としてモデル化せよ．

(a) 状態を定義し推移図，推移行列を作れ．

(b) 決着がつくまでの期待総対局数はいくらか．

(c) 最初に勝ったほうはどれくらい有利になるか．