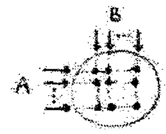
# 6 ゲーム理論

## 6.1 ゲームとは

- 複数の主体が競合的な条件の下で，各人の利益を追求する状況のモデル．
- John von Neumann，Oskar Morgenstein　　（零和ゲームと双対定理）
- 各主体の最適な行動は？

> 各主体（プレイヤー）の選択した手の組合せでゲームの結果（各人の利益）が決まる．




a. 競合条件

- 協力　　　　話し合ってパイを大きくする
- 非協力

　零和（zero sum）ゲーム：片方の利益が他方の損失（通常の勝負），協力の余地なし．

　非零和ゲーム：両者共に利益を得る可能性（協力の余地）有り．

　　囚人のジレンマ

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{A}\setminus\mathrm{B} & \begin{array}{cc} \text{自白} & \text{黙秘} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{自白} \\ \text{黙秘} \end{array} & \begin{pmatrix} 6\setminus 6 & 3\setminus 20 \\ 20\setminus 3 & 0\setminus 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. ゲームの構造

- 偶然ゲーム：　相手の“手”には依存せず，サイコロの目の出方等の偶然要素によって決まる．原則として，相手の“手”を読む必要がない．
- 戦略ゲーム：　各プレイヤーの選択した“手”の組合せによって勝敗（利益）が決まる．ヨミが入る．曹操と孔明（退却路と待伏せ地点）

c. ゲームの人数

$2, 3, \cdots, n$ 人

> 本講義での考察の対象
> - 2人 零和 戦略 ゲーム
> - 完全知の仮定：各プレイヤーは充分に合理的で最善の手を打つと仮定する．ヨミの前提．

## 6.2 2人零和ゲーム

a. チェス，将棋 のような完全情報ゲーム．

逐次的な手番の系列 ゲームの木（ゲームの展開形）

リスト化：すべての局面に対して，とり得る“手”を並べる．

要するに，全局面における“手”をあらかじめ登録したもの．　　マクロ化された“手”．

このような“手”の並べ方全体の集合を考える.
$S_1, S_2, \cdots, S_M$ , $G_1, G_2, \cdots, G_N$

$$
\begin{array}{c} 先手\backslash後手 \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ S_M \end{array}
\begin{array}{c} G_1 \quad G_2 \quad \cdots\cdots \quad G_N \\ \left(\begin{array}{c} \\ -1:先勝 \\ 0:引分 \\ 1:後勝 \\ \\ \end{array}\right) \end{array}
\longleftarrow 支払い行列
$$

- 零和2人ゲームの標準形,「行列ゲーム」と呼ぶ.

**行列ゲーム**: R(行プレイヤー)とC(列プレイヤー)はそれぞれの選択肢から勝手に適当なものを選んで同時に公開する.
R の選択肢: $R_1, R_2, \cdots, R_m$
C の選択肢: $C_1, C_2, \cdots, C_M$
$R_i$ と $C_j$ が選ばれたとき, R から C へ $a_{ij}$ の支払いが行われる.
(1回のプレー)

例: 退却(曹操)と待伏せ(孔明)

$$
\begin{array}{c|cc} 曹\backslash孔 & 山 & 平 \end{array}
$$
$$
\begin{array}{c} 山 \\ 平 \end{array}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}
$$

## 6.3 行列ゲームの鞍点(鞍値)

(定義) $(k, \ell)$ が支払い行列 $A$ の鞍点
$\Leftrightarrow \quad \forall i,\ j \quad a_{i\ell} \geq a_{k\ell} \geq a_{kj}$
$a_{k\ell}$: 鞍値

(定理)

支払い行列 $A$ が2つ以上の鞍点をもつとき, それらの鞍値は一致する.
$(k, \ell)$, $(u, v)$ 鞍点 $\Rightarrow$ $a_{k\ell} = a_{uv}$
さらに, $(u, \ell)$, $(k, v)$ も鞍点となる.

## 6.4 鞍点が存在する場合の（双方の）最適戦略

鞍点を $(k,\ell)$ とする．

R（row player）の態度：

$$\min_i \max_j a_{ij} = \min_i a_{i\varphi(i)}$$
$$\arg\min_i \max_j a_{ij} = \min_i a_{i\varphi(i)} = i^* = k$$

C（column player）の態度：

$$\max_j \min_i a_{ij} = \max_j a_{\psi(j)j}$$
$$\arg\max_j \min_i a_{ij} = \max_j a_{\psi(j)j} = j^* = \ell$$

このとき，

$$\begin{cases} i^* = k, & \varphi(i^*) = \ell \\ j^* = \ell, & \psi(j^*) = k \end{cases}$$

であるから， R $\rightarrow k$， C $\rightarrow \ell$ は互いに安定な戦略である．

| |
|---|
| $a_{k\ell} = \min_i \max_j a_{ij} = \max_j \min_i a_{ij}$ をゲームの値という．<br>ゲームの値 = R の支払い（損失） = C の受取り（利得） |

## 6.5 鞍点が存在しない場合—混合戦略 (cf. 純粋戦略)

鞍点が存在しない場合， 「$\psi(j^*) = i^*$ かつ $\varphi(i^*) = j^*$」が**成立しない**.

曹操–孔明の退却待伏せゲーム

$i^* = 2$ ;　　$\varphi(i^*) = 2$

$j^* = 1$ ;　　$\psi(j^*) = 2$

minimax/maximin で 手を決めると,

曹 (平=2) → 孔 (平=2) → 曹 (山=1) → 孔 (山=1) → 曹 (平=2) → ⋯　　（振動）

混合戦略

| |
|---|
| プレーを何度も繰り返すとして，毎回の手を random に選び，支払い（受取り）の期待値を minimax/maxmin することを考える. |

混合戦略

曹（R）$\begin{cases} \text{手 1:} & p \\ \text{手 2:} & 1-p \end{cases}$　　　孔（C）$\begin{cases} \text{手 1:} & q \\ \text{手 2:} & 1-q \end{cases}$

R が $p$，C が $q$ を選んだときの，期待支払（利得）値 を $F_{pq}$ と書く.

$$F_{pq} = 5pq + (-5)p(1-q) + (-2)(1-p)q + 3(1-p)(1-q)$$

R（曹）の態度：

$$\min_p \max_q F_{pq} = \min_p \max_q \{(1-q)F_{p0} + qF_{p1}\}$$

$$= \min_p \begin{cases} F_{p0} & p \le \frac{1}{3} \\ F_{p1} & p \ge \frac{1}{3} \end{cases}$$

$p^* = \frac{1}{3}$

$F_{pq} = 5q(3p-1) - 8p + 3$　　（$p = \frac{1}{3}$ のとき $F_{pq}$ は $q$ に依らない）

C（孔）の態度：

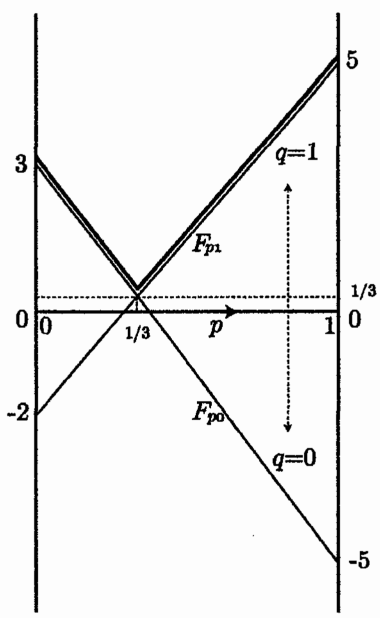
$$\max_q \min_p F_{pq} = \max_q \min_p \{(1-p)F_{0q} + pF_{1q}\}$$

$$= \max_q \begin{cases} F_{1q} & q \le \frac{8}{15} \\ F_{0q} & q \ge \frac{8}{15} \end{cases}$$

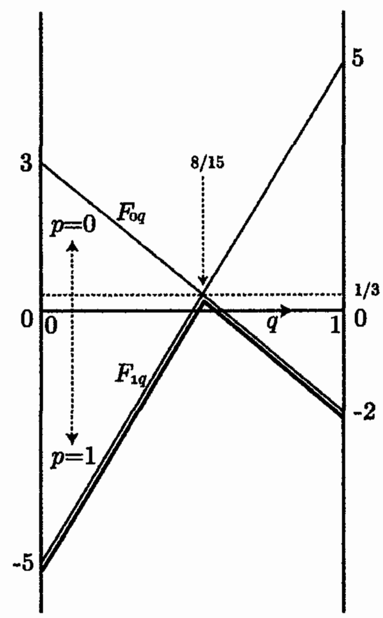
$q^* = \frac{8}{15}$

$F_{pq} = p(15q-8) - 5q + 3$　　（$q = \frac{8}{15}$ のとき $F_{pq}$ は $p$ に依らない）

$$F_{\frac{1}{3}\frac{8}{15}} = F_{\frac{1}{3}q} = F_{p\frac{8}{15}} = -\frac{8}{3} + 3 = \boxed{\frac{1}{3}} \quad \longleftarrow \quad \text{ゲームの値}$$




R（曹）の立場から見た $F_{pq}$
（$p$ を変数とし，$F_{p0}$ と $F_{p1}$ の凸結合として見る）




C（孔）の立場から見た $F_{pq}$
（$q$ を変数とし，$F_{0q}$ と $F_{1q}$ の凸結合として見る）

## 6.6 一般の場合の混合戦略—LPによる定式化

支払い行列　$A = (a_{ij})$

Rの混合戦略：$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$　　$\sum p_i = 1,\ \ p_i \geq 0$

Cの混合戦略：$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$　　$\sum q_i = 1,\ \ q_j \geq 0$

● Rの minimax 戦略

$$\min_{\substack{\boldsymbol{p} \\ \sum p_i = 1 \\ p_i \geq 0}} \ \max_{\substack{\boldsymbol{q} \\ \sum q_j = 1 \\ q_j \geq 0}} \left(\sum_i \sum_j p_i a_{ij} q_j\right)$$

● Cの maximin 戦略

$$\max_{\substack{\boldsymbol{q} \\ \sum q_j = 1 \\ q_j \geq 0}} \ \min_{\substack{\boldsymbol{p} \\ \sum p_i = 1 \\ p_i \geq 0}} \left(\sum_i \sum_j p_i a_{ij} q_j\right)$$

Rの戦略をもう少し詳しく見ると，

$$\min_{\substack{\boldsymbol{p} \\ \sum p_i = 1 \\ p_i \geq 0}} \boxed{\max_{\substack{\boldsymbol{q} \\ \sum q_j = 1 \\ q_j \geq 0}} \left(\sum_i \sum_j p_i a_{ij} q_j\right)} \implies z(\boldsymbol{p})$$

すなわち，

$$\begin{cases} \min & z(\boldsymbol{p}) \\ \text{sub.to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \ p_i \geq 0 \\ & \boxed{\forall q\ (\text{s.t.} \displaystyle\sum_j q_j = 1,\ q_j \geq 0), \qquad \sum_i \sum_j p_i a_{ij} q_j \leq z(\boldsymbol{p})} \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

条件①は次の条件②と同値．

$$\boxed{\sum_i p_i a_{ij} \leq z(\boldsymbol{p}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)} \quad \cdots\cdots ②$$

●したがって，R の minimax 戦略は

$$(\mathrm{R}) \begin{cases} \min_{\boldsymbol{p}} & z \\ \text{sub.to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} - z \leq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \\ & p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

の最適解 $\boldsymbol{p}^*$ を求めることである．

● C の maximin 戦略についても同様に考えると，

$$(\mathrm{C}) \begin{cases} \max_{\boldsymbol{q}} & w \\ \text{sub.to} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j - w \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & q_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

の最適解 $\boldsymbol{q}^*$ を求めることに帰着する．

★ (R) と (C) は互いに双対（それぞれは他方の双対問題）．　　**ゲームの値** $= z(\boldsymbol{p}^*) = w(\boldsymbol{q}^*)$.