2017-04-11,14

# 平成29年度
# オペレーションズ・リサーチ1（OR1）
# 数理計画法1（MP1）


担当：　沼田一道
numatakzmt@gmail.com
（http://numaf.net/）


## 経営工学科はどんな学科か

経営に関する問題を工学的に考えるところ

- 知識，理論，技術の教授
- 考え方を伝える（内容を伴って）
- 「知っている，理解できる」だけでは不充分
- 「問題を発見できる」，「問題解決に寄与できる」
- 最終的には「卒業研究／論文」で確認（最終試験）

## 物事には“もの”と“こと”がある

**夏目 漱石**：「人生」（五高校友会雑誌「龍南会雑誌」49号，明治29年）

『空を劃して居る之を物といひ，時に沿ふて起る之を事といふ，．．．．』

## 経営工学とは

“こと”の処理・運営に関する問題を，認識し，解決するための考え方／諸方法の　集まり

- 工学における経営工学の位置づけ
  - （動作する，機能する ➡ 他学科）
  - 安く，早く作る
  - 客の気に入るものを作る
  - 不良品の減少
  - 満足のいくタイミングで届ける
  - （広義の）情報工学
- モデルの提案，表現，解析 ➡ OR
  - 最適な計画，選択 ➡ 数理計画

**OR**：対象の数理的構造，定量的関係を把握・理解・記述する

- 混雑現象の解析
- 不確定な状態変化の記述
- 日程計画
- 在庫，探索，信頼性

**数理計画**：可能な選択範囲の中から最も良いものを見出す

- モデル化（定式化） と 計算
- 可能な選択肢の集合（制約条件／実行可能領域）
- 善し悪しの基準（目的関数）
- （分類） 線形計画，組み合せ計画，非線形計画
- （例） 操業計画，輸送計画，交通計画，割当問題

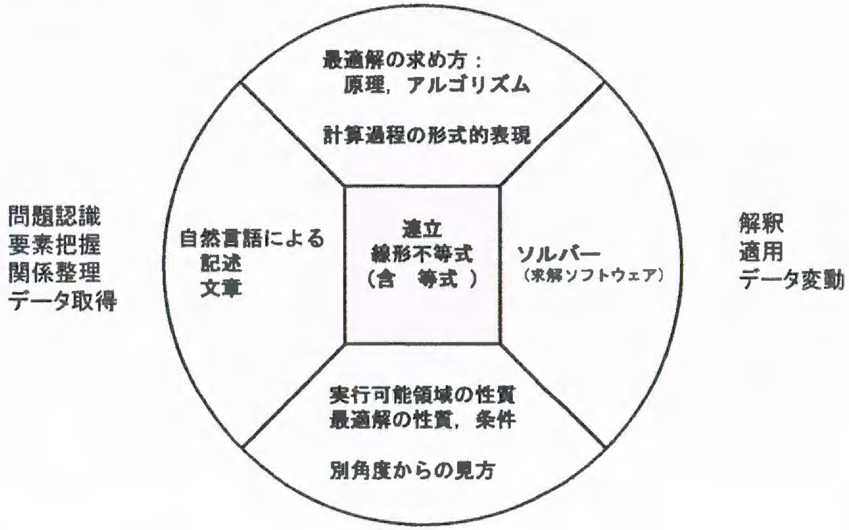
## OR1/MP1では，線形計画（モデル）を学ぶ

- 線形の目的関数の最大化（最小化）
- 線形不等式（等式）の制約条件
- 非負の決定変数

- 多くの計画問題がこの形（線形）で書ける

- 実行可能領域の性質： 線形代数
- 最適解の求め方：原理，アルゴリズム

## 線形計画




## 参考書


- Chvátal Vašek： Linear Programming, W. H. Freeman and Company, 1983.
- 阪田，藤野（訳）：線形計画法（上），啓学出版，東京，1986.
- 大鹿，一森： オペレーションズ・リサーチ ---モデル化と最適化---，共立出版，1993.
- 加藤直樹： 数理計画法 ---コンピュータサイエンス教科書シリーズ (19)---，コロナ社，2008.
- 今野，鈴木（編）： 整数計画法と組合せ最適化 ---ORライブラリー (7)---，日科技連，1982.
- 福島雅夫： 数理計画法入門 ---システム制御情報ライブラリー (15)---，朝倉書店，1996.


**講義用メモ**： http://numaf.net/Z9/z9.html の29年度用リンクから（中身は28年度版とほぼ同じ！）

# 0　最適化モデル

# 1　線形計画（Linear Programming）

目的関数 制約条件 ともに 線形

## 1.1　例

**a. 生産計画**

ある製造会社は，$m$ 種類の生産要素（原材料，労力，エネルギー）$F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を用いて，$n$ 種類の製品 $P_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を製造・販売している．

製品 $P_j$ 1 単位 の製造に必要な生産要素 $F_i$ の量を $a_{ij}$ （トン，人日，etc）とする．

生産要素 $F_i$ の使用可能上限 を $b_i$ とする．

製品 $P_j$ 1 単位当たりの利益（constant と仮定）を $c_j$ 円とする．

**総利益が最大となるように，各製品の生産量 $x_j$（単位）を定めよ．**　ただし，$x_j \geq 0$.

**b. 問題（飼料混合問題）**

ある養鶏業者は，$n$ 種類の市販飼料 $S_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ から購入して，鶏の生育に必要な $m$ 種類の栄養素 $V_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を確保している．

栄養素 $V_i$ の必要量（全鶏 1 カ月分）を $b_i$ g とする．

飼料 $S_j$ 1kg 当りの栄養素 $V_i$ の含有量 (g) を $a_{ij}$ g/kg とする．

飼料 $S_j$ の 価格 を $c_j$ 円/kg とする．

**（1 カ月の）飼料代が最小となるように，各飼料の購入量 $y_j$ （kg）を定めよ．**　ただし，$y_j \geq 0$.

**c. 輸送問題**　　略．

## 1.2　数値例 と その解

３種の資源（石油，電力，労力）を用いて，２種の製品（アメリン，ブテリン）を製造している化学会社の例．
製品１単位の製造に必要な各資源の量（$a_{ij}$），A（アメリン）,B（ブテリン）１単位当りの利益（$c_j$）と各資源の利用限度（$b_i$）が次表で与えられるとき，A,B を何単位ずつ製造するのが最適か？

資源と製品

| 資源＼製品 | アメリン | ブテリン | 資源の上限 |
|---|---|---|---|
| 石油（kl） | 9 | 4 | 360 |
| 電力（kwh） | 4 | 5 | 200 |
| 労力（人日） | 3 | 10 | 300 |
| 利益（万円） | 7 | 12 | |

**定式化：** アメリンを $x$ 単位，ブテリンを $y$ 単位 生産する．

$$
\begin{cases}
\text{maximize} & z = 7x + 12y \\
\text{subject to} & 9x + 4y \leq 360 \\
 & 4x + 5y \leq 200 \\
 & 3x + 10y \leq 300 \\
 & x, \quad y \geq 0
\end{cases}
$$

- **図による解法：** 実行可能領域（許容領域）
- slack **変数：** 2 次元 $\to$ 5 次元
- **原理と組織的解法：** 単体（simplex）法 （最も基本的）

## 1.3 行列による表現

—正準形と標準形—

現実定式化 $\Rightarrow$ { min/max， $\leq$, $\geq$, $=$ } 混在 $\Rightarrow$ 標準化

**［正準形］**

$$
\begin{cases}
\max & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 & x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_n \geq 0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
\max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{cases}
$$

**［標準形］** （ただし $m' < n'$）

$$
\begin{cases}
\max & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{n'}x_{n'} \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n'}x_{n'} = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n'}x_{n'} = b_2 \\
 & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & a_{m'1}x_1 + a_{m'2}x_2 + \cdots + a_{m'n'}x_{n'} = b_{m'} \\
 & x_1, \quad x_2, \quad \cdots, \quad x_{n'} \geq 0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
\max & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{cases}
$$

- 上記以外の形は 符号反転，変数変換，新変数導入 等により，等価な 正準形／標準形に変換可能である．
- 正準形と標準形も交互に交換可能である．

**変換方法**

- 目的関数 の min と max
- 等号制約 と 不等号制約（slack 変数の導入）
- 非負制約 の 無い変数（自由変数）
- 不等号制約 の $\leq$ と $\geq$
- $x_j \geq t$ の 平行移動

**問題** — Chvátal/阪田他訳：Linear Programming/線形計画法 (上) より —

**1** つぎの中で正準形の問題はどれか．

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \max & 3x_1 - 5x_2 \\ \text{sub. to} & 4x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ & 6x_1 - 6x_2 = 7 \\ & x_1 + 8x_2 \leq 20 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{cases} \max & 8x_1 - 4x_2 \\ \text{sub. to} & 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ & 9x_1 + 5x_2 \leq -2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} \min & 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 \\ \text{sub. to} & 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 5 \\ & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 3x_5 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

**2** 正準形にしなさい．

$$\text{(a)}\quad \begin{cases} \min & -8x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 5x_5 \\ \text{sub. to} & 6x_1 + 6x_2 - 10x_3 + 2x_4 - 8x_5 \geq 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

**3** 問題 (p1) は可能でなく，問題 (p2) は有界でないことを証明しなさい．

$$\text{(p1)}\quad \begin{cases} \max & 3x_1 - x_2 \\ \text{sub. to} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -2x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{(p2)}\quad \begin{cases} \max & x_1 - x_2 \\ \text{sub. to} & -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**4** つぎの LP 問題（線形計画問題）が，

a. 最適解をもつ　　b. 可能でない　　c. 有界でない

ための数 $s, t$ に対する必要充分条件を求めよ．

$$\begin{cases} \max & x_1 + x_2 \\ \text{sub. to} & sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**5** ある肉詰製造工場では，毎日豚肉をもも肉 480 単位，腹肉 400 単位，肩肉 230 単位生産している．これらのどの製品もそれぞれ生肉または燻製として売られる．1 日の規定労働時間内に燻製にできるもも肉，腹肉，肩肉の総量は 420 単位である．さらに，規定時間外に 250 単位を超過費用のもとで燻製にすることができる．単位あたりの純益は，もも肉（生 8 ドル，燻製 14 ドル，規定時間外燻製 11 ドル），腹肉（生 4 ドル，燻製 12 ドル，規定時間外燻製 7 ドル），肩肉（生 4 ドル，燻製 13 ドル，規定時間外燻製 9 ドル）である．

例えば，「もも肉（生 165 単位，燻製 280 単位，規定時間外燻製 35 単位），腹肉（生 295 単位，燻製 70 単位，規定時間外燻製 35 単位），肩肉（生 55 単位，燻製 70 単位，規定時間外燻製 105 単位）」とする生産計画の純利益は 9965 ドルである．

純利益を最大にする生産計画を求める問題を，正準形の LP として定式化せよ．