以後，標準形で考える．

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \text{maximize} & z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sub. to} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

i.e. maximize $z(\boldsymbol{x})$ on $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F} = \{\, \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \,\}$

$\boldsymbol{F}$: 実行可能領域（許容領域 feasible region）

1.4 標準形で考える意味

集合 $\boldsymbol{G} = \{\, \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \,\}$ は「$n-m$ 次元のベクトル空間 $kernel(A) = \{\, \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ を $\boldsymbol{g}$ だけ平行移動したもの（ただし，$\boldsymbol{g}$ は $A\boldsymbol{g} = \boldsymbol{b}$ を満たす n 次元ベクトル）」であり，アフィン空間と呼ばれる．このアフィン空間 $\boldsymbol{G}$ の次元は $n-m$ と定義される．

実行可能領域 $\boldsymbol{F}$ は，アフィン空間 $\boldsymbol{G}$ を，$x_j = 0\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ という n 次元空間の超平面で区切った非負側の共通部分 になっている．従って，$\boldsymbol{F}$ の端点（の候補）は，これら n 個の超平面のいくつかが交わるところである．$\boldsymbol{G}$ の次元が $n-m$ であるから，$n-m$ 個の超平面が交 "点" をつくる．

平たく言えば，$n-m$ 個の 変数（x_*）を 0 とおいて，求まる $\boldsymbol{G}$ の点が $\boldsymbol{F}$ の端点の候補である．

1.5 $\boldsymbol{F}$ の性質

- 集合 S が凸集合である． ⇔ 「$\forall x, y \in S$ and $0 \leq \lambda \leq 1$ $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$」．
- • $\boldsymbol{F}$ は凸集合である．
- x が凸集合 S の端点である． ⇔ 「$x \in S$」 and 「$\exists\, v, w \in S$, $0 < \lambda < 1$ s.t. $x = \lambda v + (1-\lambda)w \rightarrow v = x$, and $w = x$」．
- • $\boldsymbol{F}$ の端点の座標成分は，非零（正値）のものが高々 m 個．残り（少なくとも $n-m$ 個）の成分は 0． また，$\boldsymbol{F}$ の端点の非零成分に対応する A の列ベクトルは一次独立である．
- 有限個の端点をもつ凸集合を凸多面体と呼ぶ．
- • $\boldsymbol{F}$ の端点の個数は有限である． 従って，$\boldsymbol{F}$ は凸多面体である．

1.6 端点と基底解

★ 線形計画問題「$\min / \max z = \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$, sub. to $\boldsymbol{x} \in F$」が最適解をもつならば，
それは $\boldsymbol{F}$ の端点（実行可能基底解）の中にある．

★ 端点（候補）の求め方

正準形： 不等式を，必要本数分等号にして（境界上にあるとして）連立方程式を解く．

<u>標準形</u>： 「全変数（含 slack）の個数 − 制約式（除 変数の符号制約）の本数」 個の変数を 0（符号制約不等式 $x_j \geq 0$ の境界上）とした連立方程式を解く．

いずれの場合も，得られる解は**端点候補**， 実行可能（全変数が非負）であれば**端点**．

★ **基底解** 標準形に即した端点候補の定義．

$\boldsymbol{v}$ が（制約条件）$\{A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0})\}$ の基底解

⇔ $\boldsymbol{v}$ は，A の一次独立な（任意の m 個の）列ベクトル $\{\, \boldsymbol{a}_{j_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{j_m} \,\}$ について，対応する変数を残し，そうでない変数を 0 とした $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解いた（一意な）解

⇔ $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{F}$ の端点候補．$\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$ であれば $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{F}$ の端点（$\boldsymbol{F}$ の実行可能基底解）．

★ "0" とおいた変数を**非基底変数**，その値が一意に決まる変数を**基底変数**と呼ぶ．

★ $\boldsymbol{v}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ の実行可能基底解 ⇔ $\boldsymbol{v}$ は基底解であり，かつ $\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$ も満たす．

★ **$\boldsymbol{F}$ の実行可能基底解** ⇔ **$\boldsymbol{F}$ の端点**．

1.7 1つの端点／実行可能基底解が直ちに分かる場合

アメリン・ブテリンの生産問題問題の正準形と標準形を再掲する．

$$\begin{cases} \max & z = 7x_1+12x_2 \\ \text{s.t.} & 9x_1+\ 4x_2 \le 360 \\ & 4x_1+\ 5x_2 \le 200 \\ & 3x_1+10x_2 \le 300 \\ & x_1,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \max & z = 7x_1+12x_2 \\ \text{s.t.} & 9x_1+\ 4x_2+x_3 = 360 \\ & 4x_1+\ 5x_2 +x_4 = 200 \\ & 3x_1+10x_2 +x_5 = 300 \\ & x_1,\ \ x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

上記の正準形（左側）のように，不等式（$\le$）制約の右辺がすべて非負であるものを**原点可能**（origin feasible）な正準形と呼ぶ．右側は，それにスラック変数を補って作った（等価な）標準形である．

- 右側の標準形は，$m=3, n=5$ である．x_3, x_4, x_5 は対応する列ベクトルが一次独立な $m(3)$ 個の変数なので，基底変数として採用できる．この時，x_1, x_2 は非基底変数である．
- 基底解は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 360, 200, 300)$ である．
- 基底解 $(0, 0, 360, 200, 300)$ は実行可能であり（可能基底解），標準形の実行可能領域 $\boldsymbol{F}$（凸多面体）の端点である．

原点可能な正準形に slack 変数を補ってできた標準形においては，1つの端点（実行可能基底解）が直ちに入手できる．

1.8 単体法（シンプレックス法）の骨子

適当な実行可能基底解（端点）から出発し，
より大きな目的関数値を与える実行可能基底解（端点）へ移ることを繰り返して，
最適な実行可能基底解（端点）を発見する方法．

具体的に必要となる作業は以下の通り．

- 出発点となる最初の端点（初期端点）を手に入れる．
- 現在の端点が最適解であるか否かを判定する．
- 最適解でなければ，目的関数が増加するような隣の端点へ移る．

1.9 単体法の実行過程における端点（基底解）の表現

1つの端点候補（基底解）は，しかるべき個数の非基底変数を0とおいて制約方程式を解くことにより得られるが，その解（端点候補ベクトル）は，その点のみの情報しか持たず，$\boldsymbol{F}$ の情報を持たない．

単体法の実行過程においては，多数存在する $\boldsymbol{F}$ の 端点／（実行可能）基底解をつぎつぎに表現し操作することが必要である．そのため，端点（基底解）の表現自体が $\boldsymbol{F}$ の性質を保持する必要がある．

そのような表現方法として，「**基底形式**」，「**字引**」，「**タブロー（シンプレックスタブロー）**」と呼ばれるものがある．

これらは元の方程式（等式制約条件）と等価であり，非基底変数の組と基底変数の組合せを変えて変形することにより，すべての端点（基底解）を表すことができる．
解ベクトルは，各表現から直ちに読み取れる．

- 制約条件（の方程式部分）を，基底変数の係数が単位行列となるように掃き出した形のものを，**基底形式**と呼ぶ.
- 基底形式から，変数を除いて係数のみを表形式で表したものを**タブロー**と呼ぶ．列位置で変数を表す.
- 基底形式において非基底変数を定数とみなし，それらを右辺に移項した形のものを，**字引**と呼ぶ.
- 実行可能基底解を与える基底形式，字引を特に（実行）可能基底形式,（実行）可能字引と呼ぶ.
- 可能基底形式（可能字引）を利用して z から基底変数を消去し，$z(\boldsymbol{x})$ を非基底変数（と定数）だけで表わすことができる．これを併せたものを 可能拡大基底形式（可能拡大字引）と呼ぶ．拡大タブローの場合は，目的変数 z を移項して決定変数と同じ側に置いて表現することに注意.（以下の拡大タブローの例を参照）

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数
-1	7	12	0	0	0	0
0	9	4	1	0	0	360
0	4	5	0	1	0	200
0	3	10	0	0	1	300

2 単純単体法

単純単体法は，初期端点（初期：実行可能：タブロー，字引，拡大基底形式）が既知の（与えられた）標準形 LP を解く方法である.
従って，単純単体法は，原点可能な正準形に由来する標準形を厳密に解くことができる.
単純単体法は，最適解（値）を得るか，非有界解を検知するかして終了する.

- 原点可能な正準形に slack 変数 を補った標準形（初期可能基底形式，タブロー，字引）から出発して
- 右辺（基底変数の値）を非負に保ったまま（実行可能基底形式，タブロー，字引を辿って），
- より大きい z の値を与える端点（基底形式）へ動く.
- そのような点が存在しないときは停止する（最適 or 非有界）.

z 行の要素がすべて非正であるとき，この基底形式が与える z の値（z 行 定数列の要素 $\times(-1)$）は最大に達している.（最適タブロー）

基底形式の書換えは，z の増加に寄与する非基底変数を 1 つ選んで基底変数に取入れ（**取り入れ変数**），基底変数のうちの 1 つを非基底変数にする（**追い出し変数**）掃き出し操作によって行なう．追い出し変数は，実行可能性を保つという条件より（原則として）一意に決まる.

2.1 字引とタブローを用いた単純単体法の実行過程

$$
\left\{\begin{array}{lrl}
\max & z = & 7x_1+12x_2 \\
\text{s.t.} & 9x_1+\ 4x_2 & \le 360 \\
 & 4x_1+\ 5x_2 & \le 200 \\
 & 3x_1+10x_2 & \le 300 \\
 & x_1\ ,\quad x_2 & \ge 0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{lrl}
\max & z = & 7x_1+12x_2 \\
\text{s.t.} & 9x_1+\ 4x_2+x_3 & = 360 \\
 & 4x_1+\ 5x_2\quad +x_4 & = 200 \\
 & 3x_1+10x_2\qquad +x_5 & = 300 \\
 & x_1\ ,\quad x_2\ , x_3\ , x_4\ , x_5 & \ge 0
\end{array}\right.
$$

基底変数は 3 個,　非基底変数は 2 個

(第 1 反復)　基底変数 : x_3, x_4, x_5　非基底変数 : x_1, x_2

$$
\left\{\begin{array}{l}
z\ =\ \ 0+7x_1+12x_2 \\
x_3 = 360-9x_1-\ 4x_2 \\
x_4 = 200-4x_1-\ 5x_2 \\
x_5 = 300-3x_1-10x_2
\end{array}\right.
\iff
$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数
-1	7	12	0	0	0	0
0	9	4	1	0	0	360
0	4	5	0	1	0	200
0	3	10	0	0	1	300

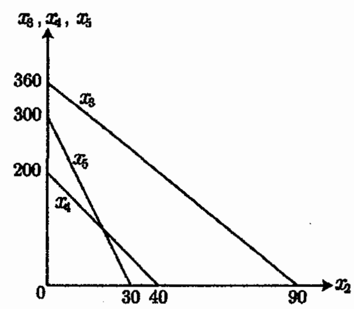
$$
\boldsymbol{x}^{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 360 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}
$$

$$
z^{(e1)} = 0
$$

最適性判断

取入れ変数 (最大係数則)　$\Longrightarrow$　追出し変数 (Ratio Test)

- 取入れ変数 : x_2
- 変数 x_1 はそのまま非基底変数 $(=0)$ に留まる.
- 追出し変数 : x_3, x_4, x_5 の中から, 次の基底解 (端点候補) が実行可能 (すなわち端点) となるように選ばれる.
- ここでは, x_5 が追出し変数となる.



基底変換

移項・代入・整理 (字引)　／　掃出し (タブロー)

- 追出し変数を含む式において, 取入れ変数を左辺に, 追出し変数を右辺に移項する. すなわち, 取入れ変数について解いた式にする.
- 左辺に移した取入れ変数の係数が 1 となるように, 当該式の両辺を α 倍する.
- この式を他の式 (z の式も含む) に代入・整理する.

$\Rightarrow$　次の字引 (隣接端点).

- 追出し変数の係数が 1 である行の, 取入れ変数列の要素を枢軸要素 (ピボット) として, 掃出しを行なう.
- ピボットを 1 とするよう, 枢軸行を α 倍する.
- 他の行の枢軸列の要素を 0 とするように, 枢軸行の β_i 倍を枢軸行に乗じて, (他の) 各行から引く. z (目的関数) 行に対しても同様に掃出す.

$\Rightarrow$　次のタブロー (隣接端点).

$$
\begin{aligned}
10x_2 &= 300 - 3x_1 - x_5 \\
x_2 &= 30 - 0.3x_1 - 0.1x_5 \\
z &= 0 + 7x_1 + 12(30 - 0.3x_1 - 0.1x_5) \\
&= 360 + 3.4x_1 - 1.2x_5 \\
x_3 &= 360 - 9x_1 - 4(30 - 0.3x_1 - 0.1x_5) \\
&= 240 - 7.8x_1 + 0.4x_5 \\
x_4 &= 200 - 4x_1 - 5(30 - 0.3x_1 - 0.1x_5) \\
&= 50 - 2.5x_1 + 0.5x_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
-z+ & 3.4x_1 & & & -1.2x_5 & = & -360 \\
 & 7.8x_1 & +x_3 & & -0.4x_5 & = & 240 \\
 & 2.5x_1 & & +x_4 & -0.5x_5 & = & 50 \\
 & 0.3x_1 + x_2 & & & +0.1x_5 & = & 30
\end{array}
$$

枢軸行：

0	0.3	1	0	0	0.1	30

第 0 行（目的関数行）- 12 * 枢軸行

-1	3.4	0	0	0	-1.2	-360

第 1 行（基底変数 x_3）- 4 * 枢軸行

0	7.8	0	1	0	-0.4	240

第 2 行（基底変数 x_4）- 5 * 枢軸行

0	2.5	0	0	1	-0.5	50

（第 2 反復）　基底変数：x_2, x_3, x_4　非基底変数：x_1, x_5

$$
\begin{cases}
z = 360+3.4x_1-1.2x_5 \\
x_3 = 240-7.8x_1+0.4x_5 \\
x_4 = 50-2.5x_1+0.5x_5 \\
x_2 = 30-0.3x_1-0.1x_5
\end{cases}
\iff
$$

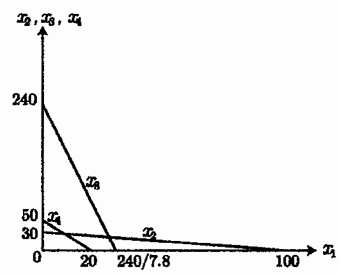
z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数
-1	3.4	0	0	0	-1.2	-360
0	7.8	0	1	0	-0.4	240
0	2.5	0	0	1	-0.5	50
0	0.3	1	0	0	0.1	30

$$
\boldsymbol{x}^{e2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 240 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$z^{(e2)} = 360$

最適性判断：最適でない.　取入れ変数 $\Longrightarrow$ 追出し変数（**非有界解検知**）

- 取入れ変数：x_1
- 変数 x_5 はそのまま非基底変数（$=0$）に留まる.
- 追出し変数：x_2, x_3, x_4 の中から，次の基底解（端点候補）が実行可能（端点）となるように選ばれる.
- ここでは，x_4 が追出し変数となる.



基底変換

（第 3 反復）　基底変数：x_1, x_2, x_3　非基底変数：x_4, x_5

$$
\begin{cases}
z = 428-1.36x_4- 0.52x_5 \\
x_3 = 84+3.12x_4- 1.16x_5 \\
x_1 = 20-0.4\ x_4+0.2\ x_52 \\
x_2 = 24+0.12x_4- 0.16x_5
\end{cases}
\iff
$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	定数
-1	0	0	0	-1.36	-0.52	-428
0	0	0	1	-3.12	1.16	84
0	1	0	0	0.4	-0.2	20
0	0	1	0	-0.12	0.16	24

$$
\boldsymbol{x}^{e1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 84 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$z^{(e3)} = 428$

最適性判断：最適 !!!.

2.2 最適性の判断 と 基底形式の更新

一般の場合の可能拡大基底形式はつぎのようである．

$$
\begin{cases}
-z + c'_{j_1}x_{j_1} + c'_{j_2}x_{j_2} + \cdots + c'_{j_{n-m}}x_{j_{n-m}} & = -z'_0 \\
a'_{1j_1}x_{j_1} + a'_{1j_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{1j_{n-m}}x_{j_{n-m}} + x_{k_1} & = b'_1 \\
a'_{2j_1}x_{j_1} + a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{2j_{n-m}}x_{j_{n-m}} + x_{k_2} & = b'_2 \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \ddots & \quad \vdots \quad \vdots \\
a'_{mj_1}x_{j_1} + a'_{mj_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{mj_{n-m}}x_{j_{n-m}} + x_{k_m} & = b'_m .
\end{cases}
$$

ただし，$b'_i \geq 0$.

[判断基準（simplex 基準）]

(1) "c'_{j_l} の値がすべて非正" であれば，現在の基底解が最大値を与える．最大値は z'_0，基底変数 x_{k_i} の値は b'_i である．

(2) $c'_{j^*} > 0$ であれば，x_{j^*} を 取入れ変数に選ぶと z は増加する． 従って，x_{j^*} を基底変数とするように基底形式を書き換える．

(1) の場合には，ここで停止すればよいが，**(2)** の場合には，追い出し変数を決める必要がある．
x_{j^*} を 0 から正に増やす（基底変数にする）とき，x_{j^*} 以外の $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{n-m}}\}$ は 非基底変数のまま 0 に留まる．従って 制約条件は

$$
\begin{cases}
a'_{1j^*}x_{j^*} + x_{k_1} & = b'_1 \\
a'_{2j^*}x_{j^*} + x_{k_2} & = b'_2 \\
\quad \vdots \qquad\qquad \ddots & \quad \vdots \quad \vdots \\
a'_{mj^*}x_{j^*} + x_{k_m} & = b'_m
\end{cases}
$$

である． x_{j^*} が基底変数となることにより，現在の基底変数の値も変化するが，それは

$$
x_{k_i} = b'_i - a'_{ij^*}x_{j^*} \geq 0 \text{ すなわち } a'_{ij^*}x_{j^*} \leq b'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)
$$

の範囲でなくてはならない（変数の非負条件）．ここで次のいずれかが成立する．

(3) a'_{ij^*} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ がすべて非正である．

(4) a'_{ij^*} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ の中に正ものが 1 つ以上存在する．

(3) の場合，x_{j^*} はいくらでも大きな値をとることが出来るので，z の最大値は $+\infty$ となる．**(4)** の場合には，正値をとるものを $a'_{k_{i_1}j^*}$, $a'_{k_{i_2}j^*}$, $\ldots$, $a'_{k_{i_p}j^*}$ として，

$$
x_{j^*} \leq \frac{b'_{i_s}}{a'_{k_{i_s}j^*}} (s = 1, 2, \ldots, p)
$$

であり，x_{j^*} は 上式右辺の最小値まで増加することが許される．$s^* = \arg\min_{1 \leq s \leq p} \dfrac{b'_{i_s}}{a'_{k_{i_s}j^*}}$ として $i^* = i_{s^*}$ と書けば，$x_{k_{i^*}}$ が追い出し変数 となる．

x_{j^*} の取り入れと $x_{k_{i^*}}$ の追い出し（基底形式の書き換え）は，(i^*, j^*) を pivot とする掃き出しによって行なわれる．

2.3 単体法の概略フロー

[注意]： “minimize z” 型の問題を “maximize $-z$” に変換して扱うことは，z のままで simplex 基準 の “非正” を “非負” とすることと等価である．

2.4 練習問題（手計算）

$$
\begin{cases}
\max & z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\
 & 2x_1 \quad\;\; + 2x_3 \leq 5 \\
 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{cases}
$$